Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A XI - A

15 februarie 2015

1. Se consideră matricele $A,B\in M_n(\mathbb{C}),n\in\mathbb{N},n\geq 2$ cu proprietatea că există $\alpha\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha AB+A+B=0_n$.
   a) Să se arate că $(\alpha A+I_n)(\alpha B+I_n)=I_n$.
   b) Să se arate că $AB=BA$.

2. a) Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\ln(n+x)-\ln n\right)$.

   Să se arate că șirul $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$ este convergent.

   b) Dacă $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+\cdots+n^x}{n-1}\right)^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N},n\geq 2,$ să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Supliment GM

3. Fie $a,b\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N},n\geq 2$ și $M_n(a,b)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n având toate elementele din mulțimea $\{a,b\}$. Dacă $\det(A)\geq 0$ pentru orice $A\in M_n(a,b),$ să se arate că $a=b$.

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive cu proprietatea că $x_{2n}+\frac{1}{x_n}\leq 2$ pentru orice $n\geq 1$.

a) Să se arate că $x_{2n}\leq x_n$ pentru orice $n\geq 1$.

b) Să se arate că $x_n\geq 1$ pentru orice $n\geq 1$.

c) Rezultă în mod necesar că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent? Justificare.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect se notează cu 7 puncte